

Projekt nr 1.

Temat: *Liczby całkowite Gaussa*

Elementy zbioru $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ nazywamy *liczbami całkowitymi Gaussa*.

Normą liczby $z = a + bi$ nazywamy liczbę $N(a + bi) = a^2 + b^2$.

Liczbę $z \in \mathbb{Z}[i]$ nazywamy *jednością* (lub *elementem odwracalnym*) w $\mathbb{Z}[i]$, jeżeli istnieje $w \in \mathbb{Z}[i]$ takie, że $z \cdot w = 1 + 0i$.

Liczbę $0 \neq z \in \mathbb{Z}[i]$ nazywamy *rozkładalną*, jeżeli jest iloczynem dwu liczb, z których żadna nie jest jednością. Np. $5 = (2 + i)(2 - i)$ jest liczbą rozkładalną.

O liczbach Gaussowskich, których iloraz jest jednością mówimy, że są *stowarzyszone*. Np. liczba 2 jest stowarzyszona z liczbami $-2, 2i, -2i$.

Gaussowską liczbą pierwszą nazywamy różną od zera liczbę ze zbioru $\mathbb{Z}[i]$, która nie jest ani jednością ani nie jest rozkładalna.

Zadania do wykonania:

Część teoretyczna.

- Pokazać, że dla dowolnych $z, w \neq 0 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$ istnieją $t, r \in \mathbb{Z}[i]$ takie, że $z = t \cdot w + r$ oraz $r = 0$ lub $N(r) < N(w)$ (tzw. *dzielenie z resztą*).
- Pokazać, że liczby: $1, -1, i, -i$ są jedynymi jednościami w zbiorze $\mathbb{Z}[i]$.
- Pokazać, że każda liczba całkowita Gaussa różna od jedności i Gaussowskiej liczby pierwszej, daje się przedstawić w postaci iloczynu Gaussowskich liczb pierwszych. Rozkład ten jest jednoznaczny z dokładnością do kolejności czynników i elementów stowarzyszonych.
- Pokazać, że są trzy klasy Gaussowskich liczb pierwszych:
 - (1) liczba $1 + i$ oraz liczby z nią stowarzyszone;
 - (2) rzeczywiste liczby pierwsze p , dla których $p \equiv_4 3$ oraz liczby z nimi stowarzyszone;
 - (3) dzielniki rzeczywistych liczb pierwszych p , takich że $p \equiv_4 1$.
- Pokazać, że każda liczba pierwsza postaci $4k + 1$ da się przedstawić w postaci sumy dwu kwadratów liczb całkowitych na 8 sposobów. Rozkłady różniące się kolejnością lub znakiem traktujemy jako różne.

Część praktyczna (z wykorzystaniem komputera).

- Przedstawić graficznie podzielniki Gaussowskie liczb całkowitych.
- Przedstawić na płaszczyźnie zespolonej wizualizację rozmieszczenia liczb pierwszych Gaussa.
- Zobrazować graficznie liczbę rozkładów dowolnej liczby naturalnej na sumę dwu kwadratów liczb całkowitych. Sprawdzić, czy uzyskane przedstawienie jest zgodne z twierdzeniem Jacobiego. (Tw. Jacobiego: Dodatnią liczbę naturalną n można przedstawić w postaci sumy dwu kwadratów liczb całkowitych na $R(n)$ sposobów, gdzie $R(n)$ oznacza czterokrotność różnicy pomiędzy liczbą jej dzielników postaci $4k - 1$ a liczbą dzielników postaci $4k + 3$. Rozkłady różniące się kolejnością lub znakiem traktujemy jako różne.)

Literatura.

1. J.H. Conway, R.K. Guy, *Księga liczb*, WNT, Warszawa, 1999.
2. M. Zakrzewski, *Markowe Wykłady z Matematyki. Teoria Liczb*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2017.